CAD im Physikunterricht – Potentialtrichter

Lehrplaneinheit **Gravitationsfelder**	Thema **Potentialtrichter der Erde**	CAD im Physikunterricht F. Pfleghar

Grundlagen

Gravitationsfeld

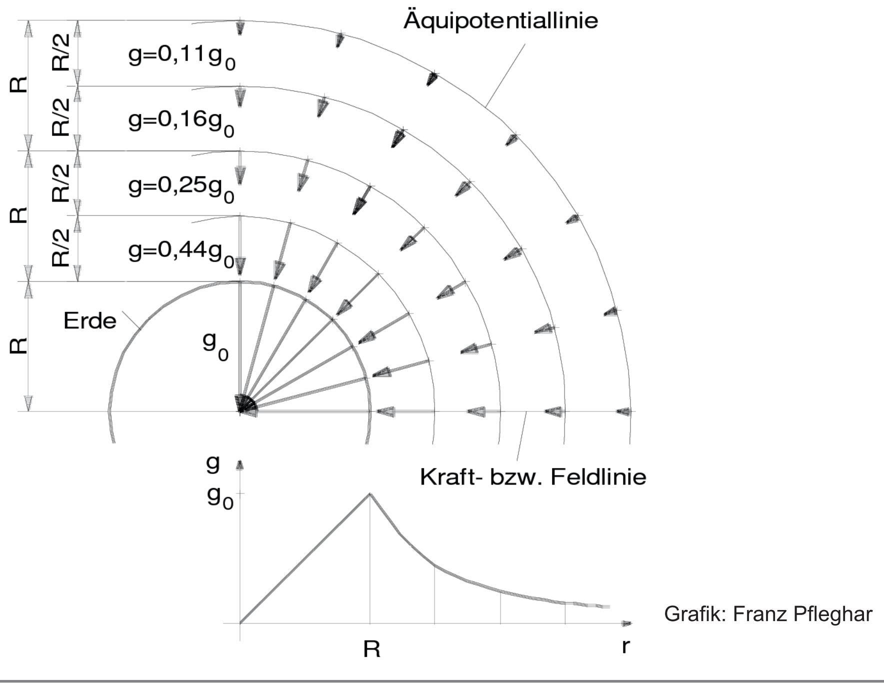
Massebehaftete Körper üben auf Grund ihrer bloßen Existenz Anziehungskräfte aufeinander aus. Man nennt diese gegenseitige Anziehung der Massen Gravitation. Ein unmittelbarer Kontakt zwischen den Massen ist nicht erforderlich. Nach dem Reaktionsaxiom bzw. dem Wechselwirkungsgesetz ziehen sich die Massen wechselseitig an. Für die Gravitationskraft, mit der sich zwei Massen M und m, deren Schwerpunkte sich im Abstand r befinden, gilt:

$$F = \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} \qquad \gamma = 6{,}672 * 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1} s^{-2}\ \text{(Gravitationskonstante)}$$

Die Wirkungslinie der Gravitationskraft, die zwei Körper aufeinander ausüben, fällt mit der Verbindungslinie der beiden Massenschwerpunkte zusammen. Man nennt diese Linie Kraftlinie. Bringt man in die Nähe eines Bezugskörpers der Masse M einen zweiten Körper der Masse m, so üben beide Körper auf der Verbindungslinie der beiden Massenschwerpunkte eine Kraft auf einander aus. Durch das Vorhandensein eines Bezugskörpers (Quelle des Kraftfeldes) wird sozusagen der umgebende Raum durch den Aufbau eines Kraftfeldes darauf vorbereitet, bei Erscheinen eines zweiten Körpers (Probekörper) auf diesen eine Kraft auszuüben. Ein Beispiel für das Vorhandensein eines Gravitationsfeldes auf der Erde ist die Gewichtskraft, die auf jeden massebehafteten Körper wirkt.
Dividiert man die Gravitationskraft durch die Masse des Probekörpers, so erhält man die Schwerebeschleunigung bzw. die Gravitationsfeldstärke g:

$$g = \frac{F}{m} = \gamma \frac{M}{r^2}$$

Auf der Erdoberfläche stimmt die Gravitationsfeldstärke g praktisch mit der Erdbeschleunigung $g_0 = 9{,}81\ m/s^2$ überein, wenn man vom Einfluss der Zentrifugalkraft infolge der Erddrehung absieht.



Hubarbeit innerhalb der Erde (Parabelfunktion)
Unter der Annahme, dass die Erde eine homogene Kugel darstellt und die Schwerebeschleunigung vom Wert Null im Erdmittelpunkt linear bis zum Wert g_0 an der Erdoberfläche ansteigt, gilt für die Hubarbeit vom Erdmittelpunkt (r = 0) bis zur Erdoberfläche (r = R) für eine Probemasse m = 1kg: Erdmasse $M = 597{,}36 \cdot 10^{22}\,\mathrm{kg}$, Erdradius $R = 6{,}378 \cdot 10^{6}\,\mathrm{m}$

$$W_i = \int_0^R F(r)dr = \int_0^R \gamma \frac{M \cdot m}{R^2} \cdot \frac{r}{R} dr = \gamma \frac{M \cdot m}{R^3} \int_0^R r\,dr = \gamma \frac{M \cdot m}{R^3} \left| \frac{1}{2} \cdot r^2 \right|_0^R = \frac{1}{2} \gamma \frac{M \cdot m}{R}$$

$$W_i = \frac{1}{2} \gamma \frac{M \cdot m}{R} = \frac{1}{2} 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1} s^{-2}\ \frac{597{,}36 \cdot 10^{22}\,kg \cdot 1kg}{6{,}378 \cdot 10^{6}\,m} = 3{,}13 \cdot 10^{7}\,J$$

Hubarbeit außerhalb der Erde (Hyperbelfunktion)

$$W_a = \int_R^r F(r)dr = \int_R^r \gamma \frac{M \cdot m}{r^2} dr = \gamma \cdot M \cdot m \int_R^r \frac{1}{r^2} dr = \gamma \cdot M \cdot m \left| -\frac{1}{r} \right|_R^r = \gamma \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{R} - \frac{1}{r} \right]$$

Wird ein Körper der Masse m = 1kg von der Erdoberfläche (r = R) auf einen unendlich großen Abstand ($r = \infty$) angehoben, so gilt für die Hubarbeit:

$$W_a = \gamma \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{R} \right] = 6{,}672 \cdot 10^{-11}\ m^3\ kg^{-1} s^{-2}\ 597{,}36 \cdot 10^{22}\,kg \cdot 1kg\ \frac{1}{6{,}378 \cdot 10^{6}\,m} = 6{,}26 \cdot 10^{7}\,J$$

Die Hubarbeit wird als potentielle Energie E_p gespeichert.

Potentielle Energie außerhalb der Erde
Die Bezugsebene für die potentielle Energie wird zweckmäßigerweise ins Unendliche ($R = \infty$) gelegt.
Für die potentielle Energie außerhalb der Erde ($R <= r <= \infty$) gilt:

$$E_{pa} = -\gamma \cdot M \cdot m \cdot \frac{1}{r}$$

Das negative Vorzeichen rührt vom unendlich weit entfernten Bezugsort her. So ist die potentielle Energie eines auf dem Fußboden liegenden Gegenstandes negativ, wenn die Bezugsebene in der Zimmerdecke liegt.

Potentielle Energie innerhalb der Erde (Bezugsebene im Unendlichen)
Für die potentielle Energie innerhalb der Erde ($0 <= r <= R$) gilt:

$$E_{pi} = -\frac{3}{2} \gamma \cdot M \cdot m \left[\frac{1}{R} \right] + \frac{1}{2} \gamma \frac{M \cdot m}{R^3} r^2 = \frac{\gamma \cdot M \cdot m}{2\,R} \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right)$$

Gravitationspotential außerhalb der Erde
Die potentielle Energie eines Probekörpers der Masse m hängt von seiner Position und der Masse M des Bezugskörpers, der ein Kraftfeld um sich herum aufgebaut hat, ab. Um das Kraftfeld um den Bezugskörper direkt beschreiben zu können, wird die potentielle Energie durch die Probemasse m dividiert. Der Quotient aus der potentiellen Energie eines Probekörpers und seiner Masse m heißt Gravitationspotential V, die Maßeinheit ist J/kg.

$$V_{pa} = \frac{E_{pa}}{m} = -\gamma \cdot M \cdot \frac{1}{r}$$

Gravitationspotential innerhalb der Erde

$$V_{pi} = \frac{E_{pi}}{m} = \frac{\gamma \cdot M}{2\,R} \cdot \left(\frac{r^2}{R^2} - 3 \right)$$

Aufgabe

- Darstellung der potentiellen Energie E_p einer Probemasse m = 1 kg im Schwerefeld der Erde in einer Wertetabelle für folgende Abstände für r:

  Masse der Erde M = $597{,}36 \cdot 10^{22}$ kg

  Radius der Erde R = $6{,}378 \cdot 10^{6}$ m

r	0	¼ R	½ R	R	2 R	3 R	4 R	5 R
E_p in J								

- Darstellung des Verlaufs mit Hilfe der Spline-Funktion im CAD-Programm (MegaCAD)

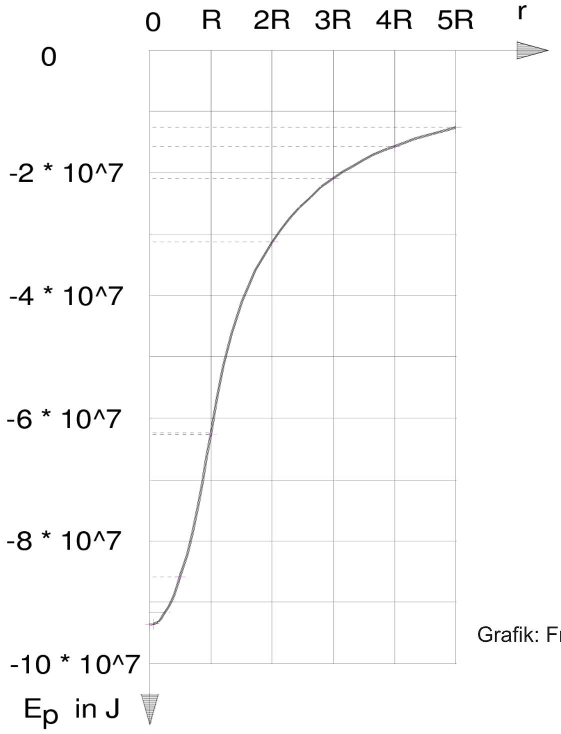
- Dreidimensionale Darstellung der potentiellen Energie als Rotationsfläche (Potentialtrichter) mittels 3D-CAD

Lösung

- Wertetabelle

r	0	¼ R	½ R	R	2 R	3 R	4 R	5 R
E_p in J	$-9{,}39 \cdot 10^7$	$-9{,}17 \cdot 10^7$	$-8{,}59 \cdot 10^7$	$-6{,}26 \cdot 10^7$	$-3{,}12 \cdot 10^7$	$-2{,}08 \cdot 10^7$	$-1{,}56 \cdot 10^7$	$-1{,}25 \cdot 10^7$

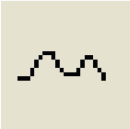
- Darstellung der Funktion



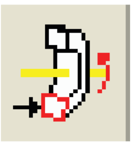
Grafik: Franz Pfleghar

Potentielle Energie der Probemasse m = 1 kg in der Umgebung der Erde

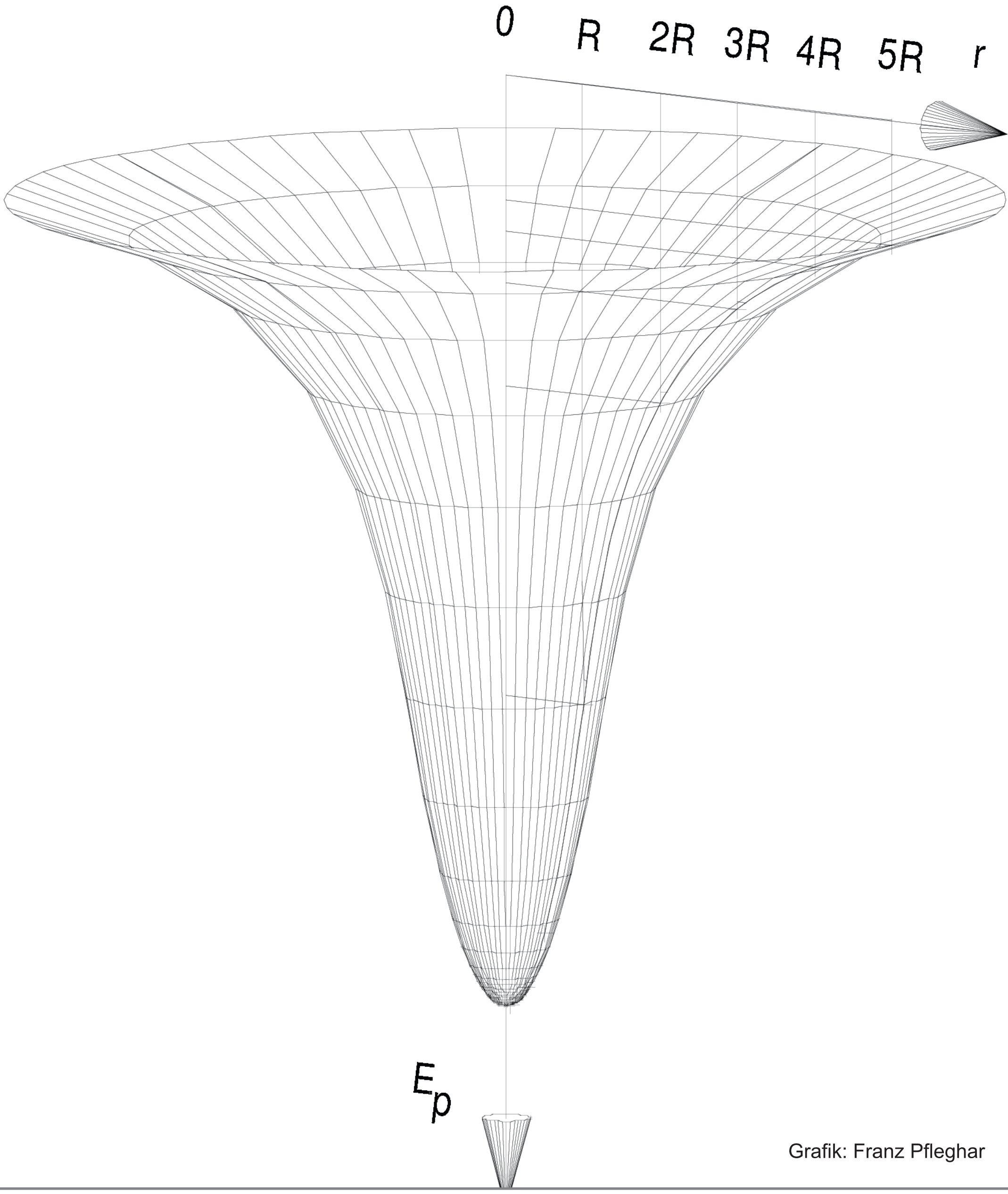
- Dreidimensionale Darstellung der potentiellen Energie (Potentialtrichter)



Die Funktion "Splines" erzeugt zu vorgegebenen Stützpunkten eine glatte Kurve. Für die Berechnung der Kurve stehen verschiedene Spline-Verfahren (Bezier-Splines) zur Verfügung.



Die Funktion „Rotationsflächen mit einer freien Rotationsachse" erlaubt die Konstruktion einer Fläche, die durch Rotation einer Kurve bzw. eines Profils entsteht. Zuerst wird das Profil gewählt. Danach wird die Rotationsachse über zwei Punkte bestimmt.



Grafik: Franz Pfleghar

Franz Pfleghar